

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Раздел «Линейная алгебра»

Электронное учебно-методическое пособие
для студентов 1 курса экономического факультета

**Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»
Кафедра высшей математики**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Раздел «Линейная алгебра»**

Электронное учебно-методическое пособие
для студентов 1 курса экономического факультета

Кемерово 2009

Составитель: старший преподаватель Айнетдинова Л.Н.

Высшая математика. Раздел «Линейная алгебра». Электронное учебно-методическое пособие для студентов 1 курса экономического факультета./ сост. Л.Н. Айнетдинова; ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». – Кемерово, 2009. – 58 с.

Электронное учебно-методическое пособие написано по курсу Высшая математика. Раздел «Линейная алгебра» для студентов 1 курса экономического факультета в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Учебно-методическое пособие содержит вопросы, которые необходимо знать для изучения предложенной темы практического занятия, разработаны примеры задач, приведены задачи для работы в аудитории и для самостоятельной работы.

Рекомендовано методической
комиссией математического
факультета
«___» _____ 2009 г.
Председатель методической
комиссии факультета
_____ В.А. Шалаумов

Рекомендовано к утверждению на
заседании кафедры высшей
математики
«___» _____ 2009 г.
Заведующий кафедрой
_____ С.П. Брабандер

Содержание

Введение	6
Тема 1	7
Матрицы.....	7
Примеры решения задач.....	7
Тема 2	11
Свойства определителей	11
Примеры решения задач.....	11
Тема 3	15
Обратная матрица. Матричные уравнения.....	15
Примеры решения задач.....	15
Тема 4	18
Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	18
Примеры решения задач.....	18
Тема 5	22
Ранг матрицы СЛАУ.....	22
Примеры решения задач.....	22
Тема 6	26
Однородная система линейных уравнений. ФСР.....	26
Примеры решения задач.....	26
Тема 7	29
Линейная зависимость векторов.	29
Базис и размерность линейного пространства.....	29
Примеры решения задач.....	30
Тема 8	36
Линейные операторы.	36
Тема 9	38
Квадратичные формы.	38
Тема 10	40
Аналитическая геометрия на плоскости. Простейшие задачи.....	40
Тема 11	42
Кривые второго порядка.	42
Тема 12	45
Прямая и плоскость в пространстве.....	45
Тема 13	47
Векторная алгебра.....	47
Справочные материалы	49
ГЛОССАРИЙ.....	51
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ.....	55
Литература	59

Принятые сокращения и обозначения, условные значки

	Переход к формулировке понятия
	Теория к решению примера
	Переход к содержанию

Введение

Учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика» разработано в соответствии с типовой учебной программой и преследует собой – устранить недостаточность и разрозненность задачников по данному курсу.

Данное пособие предназначено для изучения следующих разделов курса: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия».

К каждой теме приведены вопросы, которые необходимо знать для изучения предложенной темы. Представлены примеры для решения студентами, как на практических занятиях, так и для выполнения домашних заданий. В конце пособия приведен глоссарий к разделу «Линейная алгебра» и справочный материал по теме «Векторная алгебра».

Тема 1

Матрицы

I. Контрольные вопросы.

1. Что называется матрицей?
2. Что понимается под операцией транспонирования матрицы? Существует ли транспонированная матрица для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}?$$

3. Свойства операции транспонирования матриц

$$1) \quad A^T{}^T = A$$

$$2) \quad aA^T = aA^T$$

$$3) \quad A + B^T = A^T + B^T$$

$$4) \quad A \cdot B^T = B^T \cdot A^T$$

4. Записать в развернутом виде матрицу $A = \|a_{ij}\| \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, 6}$.

5. Можно ли сложить две матрицы с размерами 2×3 и 3×1 ?

6. Как перемножаются матрицы? Можно ли умножить матрицу с размерами 2×3 на матрицу с такими же размерами.

7. Как связаны между собой минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} ? Запишите минор и алгебраическое дополнение элемента a_{26} .

Примеры решения задач (умножение матриц)

Пример 1. Вычислить произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -23 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 7 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Перемножим матрицы, умножая элементы каждой строки на соответствующие элементы каждого столбца.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -23 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 7 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 & 3 \cdot -4 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot -2 & 3 \cdot -8 - 2 \cdot -9 - 3 \cdot -1 \\ -23 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 & -23 \cdot -4 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot -2 & -23 \cdot -8 + 5 \cdot -9 + 7 \cdot -1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 0 & -2 \cdot -4 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot -2 & -2 \cdot -8 + 1 \cdot -9 - 1 \cdot -1 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} -11 & -10 & -3 \\ 12 & 88 & 132 \\ 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Доказать, что матрица $x = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Подставим матрицу x в исходное уравнение

$$Ax^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax^2 + Bx + C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, матрица $x = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ является корнем матричного

уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$.

II. Задания

1. Даны матрицы A и B . Вычислите

1) AB ; 2) $A'B'$; 3) $B'A'$.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A :

$$a) f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$б) f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Как изменится произведение $A \cdot B$ матриц A и B , если:

а) переставить i -ю и j -ю строки A ;

б) к i -й строке матрицы A прибавить j -ую строку, умноженную на число α ;

в) переставить i -й и j -й столбцы матрицы B ;

г) к i -му столбцу матрицы B прибавить j -й столбец, умноженный на число α .

4. Найдите те из произведений матриц AB и BA , которые существуют:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$б) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$в) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$г) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Вычислить $D = C^2 + (AB)^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Какие из следующих операций можно провести с матрицами A, B?

$$a) A + B \quad б) A^T + B \quad в) A + B^T$$

$$г) A \cdot B \quad д) B \cdot A \quad е) A^T \cdot B$$

$$ж) A \cdot B^T \quad з) A^T \cdot B^T \quad и) B^T \cdot A^T$$

7. Является ли матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ корнем уравнения

$$X^3 - 6X^2 + 8X - 9E = 0?$$

Тема 2

Свойства определителей

I. Контрольные вопросы.

1. Что значит разложить определитель по элементам строки (столбца).
2. Запишите схематично «правило треугольника».
3. Запишите теорему Лапласа.
4. Сформулируйте свойства определителя и на примере определителя 3-го порядка, написанного в общем виде докажете их.

Примеры решения задач (вычисление определителей)

Пример 1. Вычислит величину определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Рассмотрим три способа нахождения величины определителя.

1 способ основан на разложении определителя (теорема Лапласа), например, по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot -8 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot -6 = -58.$$

2 способ использует правило треугольников (правило Саррюса).

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot -2 \cdot 2 + 3 \cdot -4 \cdot -1 + 5 \cdot -1 \cdot -1 - 5 \cdot -2 \cdot -1 + 2 \cdot -1 \cdot -4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = -58$$

3 способ основан на приведении определителя к треугольному виду.

Определитель же треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_2 & x_4 \\ \swarrow & \\ \swarrow & \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{x^6} \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 58/6 \end{vmatrix} = -58$$

Последний способ прекрасно работает с большими определителями.

II. Задания.

1. Вычислите определители 2-го порядка

$$a) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

2. Вычислите определитель 3-го порядка

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad б) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} \quad в) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

3. Решите уравнение

$$a) \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4. Решите неравенство

$$a) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0 \quad б) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

5. Используя свойства определителя доказать следующие тождества (определители не разворачивать):

$$\begin{aligned}
 a) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} &= -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 б) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= 1 - x^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 в) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} &= b - a \quad c - b \quad c - a \\
 г) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

6. Вычислить следующие определители используя свойства

$$a) \begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} a+1^2 & a^2+1 & a \\ b+1^2 & b^2+1 & b \\ c+1^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$$

7. Вычислить определители; получив максимальное число нулей в строке или столбце:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad б) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель 6-го порядка, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min i, j$.

9. Вычислить определитель 6-го порядка, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max i, j$

10.Найти значение параметра C , при котором величина определителя

матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & c & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ станет равной 10^3 .

Тема 3

Обратная матрица. Матричные уравнения.

I. Контрольные вопросы.

1. Какая матрица называется обратной по отношению к матрице A .
2. Свойства обратных матриц.

$$a) A^{-1}{}^{-1} = A \quad б) A^{-1}{}^T = A^T{}^{-1} \quad в) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$г) AB^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad д) A^{-1}{}^m = A^{m-1}$$

3. Какая матрица имеет обратную?
4. Формула для вычисления A^{-1} .
5. Запишите решение для матричных уравнений вида:
а) $A \cdot x = B$; б) $x \cdot A = B$; в) $A \cdot x \cdot B = C$.

Примеры решения задач (нахождение обратной матрицы)

Пример 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную A^{-1} .

Решение. Метод присоединенной матрицы. Найдем определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1. \text{ Транспонируем матрицу } A. \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим присоединенную матрицу из алгебраических дополнений к элементам транспонированной. Например,

$$A_{11}^T = -1^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12}^T = -1^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \text{ и так далее. Тогда}$$

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \text{ обратная матрица вычисляется по такой формуле:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить матричное уравнение, считая все матрицы, участвующие в

преобразованиях, невырожденными. $A X^{-1 T T} + A X^{-1} = E$.

Решение. Воспользуемся свойствами транспонированной и обратной матриц:

$$X^{-1 T T} A^T + X^{-1} A^{-1} = E \quad \text{или} \quad X^{-1} A^T + X^{-1} A^{-1} = E \text{ Вынесем матрицу } X^{-1} \text{ за}$$

скобки и умножим уравнение слева на матрицу X .

$$X^{-1} A^T + A^{-1} = E \quad A^T + A^{-1} = X. \text{ Таким образом, решением матричного}$$

уравнения является матрица $X = A^T + A^{-1}$.

II. Задания.

1. При каких значениях c матрица A не имеет обратной

$$a) A = \begin{pmatrix} c & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}; \quad б) A = \begin{pmatrix} c & -4 & 1 \\ 7 & -c & 2 \\ 2 & -1 & -c \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Найти } A^{-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричные уравнения

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ответ} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$б) x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ответ} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ответ} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ответ} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Вычислить значение $f(x)$ при $x = A$

$$f(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Решить систему матричных уравнений

$$a) \begin{cases} AX + Y = A^{-1} \\ X + AY = 0 \end{cases} \quad б) \begin{cases} X + Y = A^{-1} \\ AX - AY = B^{-1} \end{cases}$$

6. Решить матричные уравнения

$$a) 2AX + 3X = A^{-1}$$

$$б) AX - A^{-1}B^{-1} + BX = 0$$

$$в) AX^T + ABX^{-1} = 0$$

Тема 4

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

I. Контрольные вопросы.

1. Когда система линейных уравнений называется Крамеровской?
2. Запишите формулы для нахождения решения такой системы.
3. Запишите в развернутом виде матричное уравнение:

$$AX = B, \text{ если } A = \|a_{ij}\| \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n}$$

$$X = x_1, \dots, x_n^T \quad B = b_1, \dots, b_m^T$$

4. Что такое «прямой» ход метода Гаусса?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

1. Методом Гаусса
2. С помощью обратной матрицы
3. Методом Крамера

Решение.

1. Методом Гаусса образуем расширенную матрицу и приведем её к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 2 & -3 & -4 & | & -5 \\ 2 & -5 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -10 & | & -9 \\ 0 & -1 & -5 & | & -6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & -15 & | & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Получим систему:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 10x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Итак, решением системы уравнений является тройка чисел $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. С помощью обратной матрицы. Представим систему уравнений в виде матричного уравнения $Ax = B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид $x = A^{-1} \cdot B$. Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

и найдем обратную $A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -23 & -13 & 17 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Перемножив A^{-1} и B ,

$$\text{получим значения неизвестных } x = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -23 & -13 & 17 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Методом Крамера. Найдем главный определитель и определители матрицы коэффициентов, у которой один из столбцов заменен на столбец свободных членов. Неизвестные находятся по формуле Крамера:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-15} = 1$$

II. Задания.

1. Решите по формулам Крамера и методом обратной матрицы,

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \quad \text{ответ: } 2; -1; 1$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \quad \text{ответ: } 3; 1; -1$$

2. Решите методом Гаусса.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 1 \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{ответ: } 1; 5; 3; 2$$

$$д) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -4 \\ -3x_2 - 10x_3 + 6x_4 = -5 \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 15x_4 = -7 \end{cases} \quad \text{ответ: } 1; -3; 2; 1$$

$$е) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + 5x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \quad \text{ответ: } -1; 2; 0; 4$$

Тема 5

Ранг матрицы СЛАУ.

I. Контрольные вопросы.

1. Какая система линейных уравнений называется совместной?
2. При каких условиях система m линейных уравнений с n неизвестными совместна?
3. Теорема Кронекера-Капелли.
4. Когда система n -линейных уравнений имеет единственное решение?
5. Как определить число базисных и свободных переменных?
6. Как найти частное решение неоднородной системы линейных уравнений?
7. Как найти все множество решений неоднородной системы линейных уравнений?
8. Что такое ранг матрицы?
9. При каких преобразованиях матрицы не меняется ее ранг?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти ранг матрицы системы и решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}.$$

Решение. Найдем ранг расширенной матрицы системы

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle -1 \rangle & -1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & \langle -2 \rangle & -2 & -4 & 5 & -7 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \langle 5 \rangle & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 & -10 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} [-1 & -1 & -1] & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Минор в квадратных скобках, составленный из коэффициентов при переменных x_1, x_2, x_3 , отличны от нуля. Ранг матрицы коэффициентов равен трем, ранг расширенной матрицы – также трем. Следовательно, по теореме Кронекера – Капели система имеет решения. Положим переменные x_1, x_2, x_3 основными, переменные x_4, x_5 – свободными. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 - x_4 + x_5 \\ 2x_2 + 2x_3 = 7 - 4x_4 + 5x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\text{Решая её получим } \begin{cases} x_3 = 2 + c_1 - c_2 \\ x_2 = \frac{1}{2} (3 - 6c_1 + 7c_2) \\ x_1 = \frac{3}{2} - 5c_1 - \frac{3}{2}c_2 \end{cases} .$$

II. Задания.

1. Найти ранг матрицы

$$\begin{aligned}
 & a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad б) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\
 & в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Что можно сказать о решении СЛАУ если:

$$a) r A = r A/B$$

$$б) r A = r A/B = 2 \text{ при } 3-x \text{ переменных}$$

$$в) r A = 2 \quad r A/B = 3?$$

3. Исследовать систему на совместность и решить ее, если она совместна.

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Пример.

$$\text{Решить систему: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = r(\bar{A}) = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{базисный минор}$$

x_1 и x_2 — основные переменные

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 5 + 5x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$x_3 = c_1 \quad x_4 = c_2$$

$$x_2 = 5 + 5c_1 + c_2 \quad x_1 = 1 + 3c_1 + 2c_2 - 2(5 + 5c_1 + c_2) = -7c_1 - 9$$

Ответ: $(-7c_1 - 9; 5 + 5c_1 + c_2; c_1; c_2)$ общее решение

$$e) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{ответ: несовместна}$$

$$ж) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{ответ: несовместна}$$

Тема 6

Однородная система линейных уравнений. ФСР.

I. Контрольные вопросы.

1. Какая система линейных уравнений является однородной?
2. Что называется ФСР однородной системы линейных уравнений.
3. Может ли однородная система линейных уравнений не иметь фундаментальных решений?
4. Как определить число фундаментальных решений?
5. Как построить ФСР?

❖ Для нахождения ФСР:

- а) r основных (базисных) переменных (с отличным от нуля базисным минором) выражают через не основные (свободные) переменные;
- б) поочередно заменяют $n - r$ не основных переменных элементами каждой строки невырожденной квадратной матрицы порядка $n - r$, например, единичный E_{n-r} . Общее решение имеет вид:

$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_{n-r} e_{n-r}$ $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$ – линейно независимые решения .

Примеры решения задач (найти ФСР)

Пример 1. Найти какие-либо фундаментальные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приведем её к диагональному виду:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 Угловой минор 3-го

порядка не равен нулю. Ранг матрицы равен трем. Пусть x_1, x_2, x_3 являются основными, x_4, x_5 - свободными. Тогда из полученной матрицы следует решение

системы в виде:
$$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 2x_4 - 7x_5 \\ x_3 = 3x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

Это решение удобно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ если } x_4 = c_1; x_5 = c_2$$

Общее решение однородной системы уравнений теперь можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Два столбца элементов $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ есть по определению фундаментальные

решения системы.

II. Задания.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

ответ: $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$;

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0; 0; -\frac{9}{4}; \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0; 1; 0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0; 0; 1; -2; 1 \end{pmatrix}$$

ответ: $c_1E_1 + c_2E_2$;

$$E_1 = \begin{pmatrix} -6; 1; 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} -7; 5; 0; 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ответ} \begin{cases} c_1E_1 + c_2E_2; \\ E_1 = 0; \frac{1}{3}; 1; 0; 0 \\ E_2 = 0; -\frac{2}{3}; 0; 0; 1 \end{cases}$$

$$\text{ответ} \begin{cases} c_1E_1 + c_2E_2; \\ E_1 = \begin{pmatrix} -3; 2; 1; 0; 0 \end{pmatrix} \\ E_2 = \begin{pmatrix} -5; 3; 0; 0; 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тема 7

Линейная зависимость векторов.

Базис и размерность линейного пространства.

I. Контрольные вопросы.

1. Что такое вектор?

❖ $x = x_1, \dots, x_n$ упорядоченный набор чисел.

2. Операции с векторами.

3. Векторное (линейное) пространство? (👉)

❖ Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число с аксиомами.

$$1. a + b = b + a$$

$$3. 0 + a = a$$

$$5. a \cdot 1 = a$$

$$7. \lambda + \mu \ a = \lambda a + \mu a$$

$$2. a + b + c = a + b + c$$

$$4. a + -a = 0$$

$$6. \lambda \ \mu a = \lambda \mu \ a$$

$$8. \lambda \ a + b = \lambda a + \lambda b$$

4. Запишите линейную комбинацию вектора a_m через $a_1, \dots, a_n$

5. Линейная зависимость векторов. (👉)

6. Размерность пространства?

❖ (максимальное число линейно независимых векторов в нем)

7. Базис n -мерного пространства?

(совокупность n линейно независимых векторов)

8. Разложение вектора $\bar{x}$ по базису e_1, e_n ?

❖ $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

9. Матрица перехода?

❖

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e \rightarrow e^* \quad e^{*T} = A^T e^T.$$

$$x^* = A^{-1}x \quad \text{или} \quad x = Ax^*$$

Примеры решения задач

Пример 1. Являются ли векторы $a_1 = 1, 2, -1$, $a_2 = 2, -3, 1$, $a_3 = 4, 1, -1$

линейно зависимыми? Если да, найти связь между векторами.

Решение. Составим матрицу из координат векторов, расположив, например, их в

виде строк, и найдем её ранг $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Из трех строк только две являются линейно независимыми. Следовательно, векторы линейно зависимы. Найдем связь между ними. Запишем линейную комбинацию $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему по методу Гаусса $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Отсюда следует $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad c \in R$ связь между векторами можно

записать, положив, например, $c = 1$: $2a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

Пример 2. Пусть в некотором старом базисе заданы векторы

$x = 0, 3, 1$, $a_1 = 2, 1, 3$, $a_2 = -3, 4, 3$, $a_3 = 1, -2, 5$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 составляют новый базис. Разложить вектор x по этому базису.

Решение. Векторы a_1, a_2, a_3 могут составить базис в трехмерном векторном пространстве, если они линейно независимы. Составить из координат этих векторов матрицу и найдя её ранг, убедимся, что он равен 3. Тогда векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы. Пусть вектор x имеет координаты x_1, x_2, x_3 в новом базисе, составленном из векторов a_1, a_2, a_3 . Тогда. В матричной форме

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \text{Найдем переменные по методу Гаусса,}$$

используя расширенную матрицу
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Отсюда $x = 1, 1, 1$.

II. Задания.

1. Найти линейную комбинацию векторов. [!\[\]\(51fa12e9938db9b91c0132320af2b84a_img.jpg\)](#)

а) $3a_1 - 2a_2 + 8a_3$, если $a_1 = 1; 2; 1; 2^T$;

$a_2 = -1; -3; 4; 5^T$; $a_3 = -5; 0; 2; 3^T$

б) $5a_1 - 6a_2 + 7a_3$, если $a_1 = 1; -1; 2; -2^T$;

$a_2 = 1; 1; -1; -1^T$; $a_3 = 3; 0; -1; 2^T$

2. Выяснить вопрос о линейной зависимости векторов:



1) Составить нулевую линейную комбинацию из заданных векторов с неизвестным коэффициентом $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$.

2) Записать по координатным равенства в систему.

3) Решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

4) Определить число ненулевых угловых коэффициентов в ступенчатой матрице, оно определяет число линейно независимых векторов в системе.

$$a) a_1 = 1; 2; 3^T \quad a_2 = 2; 5; 7^T \quad a_3 = 3; 7; 10^T$$

$$б) a_1 = 1; 2; 3^T \quad a_2 = 2; 5; 7^T \quad a_3 = 3; 7; 11^T$$

$$в) a_1 = 1; -1; 1; 1^T \quad a_2 = 1; 0; 1; 0^T \quad a_3 = 1; -3; 1; -3^T$$

$$г) a_1 = 1; 1; 1; 1^T \quad a_2 = 1; -1; 1; -1^T$$

$$a_3 = 2; 3; 1; 4^T \quad a_4 = 2; 1; 1; 3^T$$

3. Является ли линейным пространством заданное множество, если множество – это множество всех векторов 3-х мерного пространства, координаты которых – целые числа, сложение векторов и умножение на число определены общепринятым способом: т.е. если

$$a = a_1, a_2, a_3 \quad b = b_1, b_2, b_3, \text{ то } a + b = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$$

$$\text{для } \forall \alpha \in R \text{ соответственно } \alpha a = \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3$$



а) Выбрать два элемента a и b заданного множества, проверить выполнение закона коммутативности сложения

$$a + b = b + a$$

$$a + b = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$$

$$b + a = b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3 = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$$

б) Выбрать три элемента a, b, c множества проверить выполнение закона ассоциативности сложения

$$a + b + c = a + b + c$$

$$a + b + c = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 + c_1, c_2, c_3$$

$$= b_1 + a_1 + c_1, b_2 + a_2 + c_2, b_3 + a_3 + c_3$$

$$\text{аналогично } a + b + c = a_1, a_2, a_3 + b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3$$

с) Найти в этом множестве нулевой элемент т.е. $0 + a = a$

В этом множестве таким элементом является вектор

$$0 = 0, 0, 0 \quad \text{так как} \quad 0 + a = 0, 0, 0 + a_1, a_2, a_3 = a_1, a_2, a_3 = a$$

d) Выбрать элемент a множества и найти противоположный ему элемент т.е. $-a$ такой, что $a + -a = 0$.

e) Проверить для числа 1 выполнение равенства $1 \cdot a = a$

$$1 \cdot a = 1 \cdot a_1, a_2, a_3 = a_1, a_2, a_3 = a$$

f) Для чисел λ и $\mu \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda \mu a = \lambda \mu a$

$$\begin{aligned} \lambda \mu a &= \lambda \mu a_1, a_2, a_3 = \lambda \mu a_1, \mu a_2, \mu a_3 = \\ &= \lambda \mu a_1, \lambda \mu a_2, \lambda \mu a_3 = \lambda \mu a_1, a_2, a_3 = \lambda \mu a \end{aligned}$$

g) Проверить для чисел $\lambda, \mu \in R$ выполнение равенства $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) a &= (\lambda + \mu) a_1, a_2, a_3 = (\lambda + \mu) a_1; (\lambda + \mu) a_2; (\lambda + \mu) a_3 = \\ &= \lambda a_1 + \mu a_1; \lambda a_2 + \mu a_2; \lambda a_3 + \mu a_3 = \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 + \mu a_1, \mu a_2, \mu a_3 = \\ &= \lambda a + \mu a \end{aligned}$$

h) Для двух элементов множества a и b и $\lambda \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

$$\begin{aligned} \lambda(a + b) &= \lambda(a_1, a_2, a_3 + b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = \\ &= \lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2), \lambda(a_3 + b_3) = \lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \lambda b_3 = \\ &= \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 + \lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3 = \lambda a + \lambda b \end{aligned}$$

4. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = 1, 4, 6, \quad b = 1; -1; 1, \quad c = 1; 1; 3$$



a) Составить линейную комбинацию из заданных векторов с неизвестными коэффициентами $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c &= \lambda_1 1; 4; 6 + \lambda_2 1; -1; 1 + \lambda_3 1; 1; 3 = \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 6\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{aligned}$$

b) Приравнять линейную комбинацию нулевому вектору

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 6\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, 0, 0$$

с) Записать координатные равенства в систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

д) Решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{rang } A = 2$$

е) Число ненулевых диагональных элементов в ступенчатой матрице определяет число линейно независимых векторов в системе.

В ступенчатой матрице 2 ненулевых диагональных элемента $\Rightarrow$ система из трех векторов линейно зависимых.

5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = 2; 0; 2 ; b = 1; -1; 0 ; c = 0; -1; -2$$

$$a) a = 2; -1; 3 ; b = 1; 4; -1 ; c = 0; -9; 5$$

$$b) a = 1; 2; 0 ; b = 3; -1; 1 ; c = 0; 1; 1$$

$$c) a = 1; 2; 2 ; b = 1; 2; 3 ; c = 1; 2; -2$$

$$d) a = 5; 4; 3 ; b = 3; 3; 2 ; c = 8; 1; 3$$

6. Разложить вектор $x = 1; 2; 3$ по базису

$$a_1 = 1; -1; 1 , a_2 = -1; 1; 0 , a_3 = 1; 1; 1$$

7. Найти связь координат одного и того же вектора в различных базисах x

$$a) \text{ Старый базис } e_1 = 0, 1, 2 ; e_2 = 1, 2, -1 ; e_3 = 0, 1, 1$$

$$\text{Новый базис } e'_1 = 1, 0, 0 ; e'_2 = 0, 1, 1 ; e'_3 = 0, 0, 1$$

$$(x' = B^{-1} \cdot A \cdot x \quad B - \text{матрица координат нового базиса,} \\ A - \text{матрица координат старого базиса})$$

$$б) \text{ Старый базис } e_1 = 2, -1, 1 ; e_2 = 1, 2, 1 ; e_3 = 1, 1, 1 .$$

$$\text{Новый базис } e'_1 = (0, 0, 1) ; e'_2 = (0, 1, 0) ; e'_3 = (1, 0, 0)$$

8. Вектор x задан в базисе a_1, a_2, a_3 . Найти его координаты в базисе b_1, b_2, b_3

$$a) a_1 = 1, 1, 1, \quad a_2 = 2, -1, 1, \quad a_3 = 3, 0, 3$$

$$b_1 = 1, 0, 0, \quad b_2 = 0, 1, 0, \quad b_3 = 0, 0, 1$$

$$x = 1, 1, -1$$

$$b) a_1 = 1, 3, 0, \quad a_2 = 0, 1, 5, \quad a_3 = 1, 2, 1$$

$$b_1 = 1, 2, -5, \quad b_2 = 1, 3, 0, \quad b_3 = 3, 9, 6$$

$$x = 1, 1, 0$$

Тема 8

Линейные операторы.

I. Контрольные вопросы.

1. Определение оператора.

Пусть каждому вектору x ставится в соответствие по определенному правилу вектор y . Это правило называется отображением, или преобразованием, или оператором. Обозначение: $y = \tilde{p} x$

2. Какой оператор является линейным?

$$\begin{aligned} \tilde{p} x + y &= \tilde{p} x + \tilde{p} y, \\ \tilde{p} \lambda x &= \lambda \tilde{p} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } p &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ матрица оператора, то} \\ y = \tilde{p} x &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Запишите преобразование матрицы линейного оператора при переходе от старого базиса к новому

$$\tilde{p}^T = T^{-1} p^T, \quad T - \text{матрица перехода от старого к новому.}$$

4. Собственные векторы и собственное значение линейного оператора.

Вектор x называется собственным вектором оператора, если существует такое число λ , что $\tilde{p} x = \lambda x$.

Число λ называется собственным значением оператора $\tilde{p}$, соответствующим собственному вектору x . Величина λ есть корень характеристического уравнения $|p - \lambda E| = 0$.

II. Задания.

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad в) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Матрица p линейного оператора задана в старом базисе. Какой вид имеет матрица оператора в новом базисе?

$$a) p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Новый базис} \quad \begin{aligned} e_1 &= 1, 1, 0 \\ e_2 &= -2, -1, 2 \\ e_3 &= 1, 2, 1 \end{aligned}$$

$$б) p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Новый базис} \quad \begin{aligned} e_1 &= 1, 0, 1 \\ e_2 &= 3, 1, 0 \\ e_3 &= 2, 1, 2 \end{aligned}$$

Тема 9

Квадратичные формы.

I. Контрольные вопросы.

1. Определение квадратичной формы

❖ Выражение вида $\tilde{L} x = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i x_j$ называется квадратичной формой

переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

2. Запишите квадратичную форму в матричном виде

❖ $\tilde{L} x = X^T L X$

3. В каком случае квадратичная форма называется канонической? (👉)

4. Критерии оценки знакоопределенности квадратичной формы

Название формы	Обозначение	Оценка знакоопределенности формы	
		По минорам матрицы L	По собственным значениям λ матрицы L
Положительно определенная	$\tilde{L} x > 0$	Если все угловые миноры положительны $M_i^{y2l} > 0$	Если все собственные значения λ положительны
Отрицательно определенная	$\tilde{L} x < 0$	Если в угловых минорах чередуются знаки, начиная с $M_1^{y2l} < 0$	Если все собственные значения λ отрицательны
Положительно полуопределенная	$\tilde{L} x \geq 0$	Если все главные миноры неотрицательны $M_k^{2l} \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$	Если все собственные значения λ неотрицательны
Отрицательно полуопределенная	$\tilde{L} x \leq 0$	Если в главных минорах чередуются знаки, начиная $M_1^{2l} \leq 0$	Если все собственные значения λ неположительны
Неопределенная	$\tilde{L} x \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$		Если все собственные значения λ имеют разные знаки
Равная нулю	$\tilde{L} x = 0$		Если все собственные значения λ равны нулю

II. Задания

1. Записать квадратичную форму в матричном виде

$$a) \quad \tilde{L} x = \tilde{L} x_1, x_2 = 2x_1 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$$

$$б) \quad \tilde{L} x = \tilde{L} x_1, x_2, x_3 = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$$

2. Найти квадратичную форму $\tilde{L} y = \tilde{L} y_1, y_2$, полученную из квадратичной формы $\tilde{L} x = \tilde{L} x_1, x_2$ в результате действия линейного оператора $\tilde{p} y$ (линейное преобразование $x = \tilde{p} y$)

$$a) \quad \tilde{L} x = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 \quad \tilde{p} y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$б) \quad \tilde{L} x = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 \quad \tilde{p} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$в) \quad \tilde{L} x = -x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 \quad \tilde{p} y = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

3. Привести к каноническому виду квадратичной форме методом Лагранжа.

$$a) \quad \tilde{L} x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$$

$$б) \quad \tilde{L} x = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$в) \quad \tilde{L} x = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

4. Используя собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы, привести её к каноническому виду.

$$a) \quad \tilde{L} x = x_1^2 + 7x_2^2 + 8x_1x_2$$

$$б) \quad \tilde{L} x = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$$

$$в) \quad \tilde{L} x = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2$$

$$г) \quad \tilde{L} x = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$д) \quad \tilde{L} x = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Тема 10

Аналитическая геометрия на плоскости. Простейшие задачи.

I. Контрольные вопросы.

1. Записать расстояние между двумя точками

$$M_1(x_1, y_1) \text{ и } M_2(x_2, y_2).$$

2. Как находятся координаты точки $M(x, y)$ делящей отрезок с

концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении

$$\lambda \text{ т.е. } |\mu_1\mu| : |\mu\mu_2| = \lambda ?$$

3. Записать уравнение прямой:

- с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b ;
- проходящей в данном направлении (с угловым коэффициентом k) через данную точку $M_0(x_0, y_0)$;
- проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$;
- в отрезках;
- общее.

4. Как находится расстояние от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0?$$

5. Задайте угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

6. Запишите условие параллельности и перпендикулярности прямых.

II. Задания.

1. Написать уравнение прямой линии на плоскости:

- а. проходящей через произвольную точку $(a; b)$ под углом α к оси ординат;
- б. проходящей через произвольную точку $(a; b)$ и на расстоянии d от начала координат;
- с. пересекающей координатные оси в точках $(a; 0)$, $(0; b)$.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $11x - 17y = 9$, $12x + 13y = 5$.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $1;1;1$, $1;-1;0$, $2;1;3$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $1;1;1$ параллельно плоскости $2x + 4y + z = 5$.
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $2;-1;1$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z = 1$, $x + 2y + z = 0$.
6. Найти расстояние между парой параллельных плоскостей $2x - 3y + 6z = 1$, $4x - 6y + 12z = -1$.
7. Вывести уравнение прямой образованной парой пересекающихся плоскостей (переход от общего уравнения прямой к параметрическому уравнению той же прямой).
8. Найти точку, симметричную $1;-1;0$ относительно плоскости $2x - 4y + z = 3$.
9. Найти точки пересечения прямой $L: 2x + y - z = 3$, $x + y + z = 1$ с координатами плоскости.
10. В какой точке прямая $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$ пересекает плоскость $2x + 3y + z = 1$?
11. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые $15x - 8y = 51$, $4x + 3y + 35 = 0$.

Тема 11

Кривые второго порядка.

I. Контрольные вопросы.

1. Запишите общее уравнение кривых второго порядка.
2. Запишите канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
3. Как связаны параметры a, b, c у кривых второго порядка?
4. Что такое эксцентриситет кривых?
5. Свойство фокальных расстояний кривых второго порядка.

II. Задания.

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точки
 $A 1;5$, $B -4;0$ и $D 4;-4$.

Ответ: $x-1^2 + y^2 = 25$

2. Найти значение a , при котором окружность $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$ касается прямой $y = x\sqrt{3}$. Найти точку касания.

Ответ: $a = 1$; $R = R\sqrt{3}$; $c 2;0$

3. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой?

Ответ: $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,8. Найти расстояние между фокусами.

Ответ: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$; $2c = 12$

5. Эллипс проходит через точки. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки $M_1 2;\sqrt{3}$ и $M_2 0;2$ до фокусов.

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad r_1 = 4 - \sqrt{3}; \quad r_2 = 4 + \sqrt{3}$$

6. Составить каноническое уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти координаты её фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнение асимптот
7. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2;1)$ и $B(-4;\sqrt{7})$.

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$$

8. Дан эллипс $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

9. Составить уравнение параболы и её директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и окружности и симметрична относительно оси Oy .

$$\text{Ответ: } y = -\frac{x^2}{2}; \quad y = 0,5$$

10. Уравнение $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ описывает окружность радиуса 5 с центром в точке $(3;2)$. Определить все коэффициенты этого уравнения.
11. На гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ найти точку, ближайшую к точке $(3;0)$.
12. Найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
13. Записать уравнения касательных к эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, параболе $y^2 = 2px$ и гиперболе $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ в произвольной точке касания $x_0; y_0$.

14. Найти точки пересечения эллипса $x^2 + y^2 / 3 = 1$ и гиперболы $7x^2 - y^2 / 3 = 1$.

Тема 12

Прямая и плоскость в пространстве.

I. Контрольные вопросы.

1. Записать уравнение плоскости

- перпендикулярной данному вектору $\vec{n} = A, B, C$ и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- в отрезках.

2. Как можно задать прямую в пространстве?

3. Запишите условие параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

4. Дана прямая $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Запишите:

- условие параллельности прямой и плоскости;
- условие перпендикулярности прямой и плоскости.

II. Задания.

1. Определить, лежат ли точки $1; 2; -1$, $0; 1; 5$, $-1; 2; 1$, $2; 1; 3$ в одной плоскости?

2. Координаты вершин треугольника

$A: 1; 2; 0$, $B: 3; 0; -3$, $C: 5; 2; 6$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B .

3. Координаты вершин тетраэдра $2; 1; -1$, $3; 0; 1$, $2; -1; 3$, $0; \lambda; 0$, а его объем равен пяти. Найти значение неизвестной координаты.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$1; 1; 1$, $1; -1; 0$, $2; 1; 3$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $1; 1; 1$ параллельно плоскости $2x + 4y + z = 5$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $2; -1; 1$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z = 1$, $x + 2y + z = 0$.
7. Найти расстояние между парой параллельных плоскостей $2x - 3y + 6z = 1$, $4x - 6y + 12z = -1$.
8. Вывести уравнение прямой образованной парой пересекающихся плоскостей (переход от общего уравнения прямой к параметрическому уравнению той же прямой).
9. Найти точку, симметричную $1; -1; 0$ относительно плоскости $2x - 4y + z = 3$.
10. Найти точки пересечения прямой $L: 2x + y - z = 3$, $x + y + z = 1$ с координатами плоскости.
11. В какой точке прямая $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$ пересекает плоскость $2x + 3y + z = 1$?
12. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые $15x - 8y = 51$, $4x + 3y + 35 = 0$.

Тема 13

Векторная алгебра.

I. Контрольные вопросы.

1. Как задаются координаты вектора?
2. Как вычисляется длина вектора?
3. Когда векторы коллинеарны?
4. Запишите скалярное произведение векторов.
5. Свойства скалярного произведения векторов.
6. Что называется векторным произведением векторов?
7. Как используется векторное произведение при решении задач по геометрии?

II. Задания.

Векторная алгебра

1. По заданной паре векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$, найти декартовы координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}/2$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a}/3 - \vec{b}$.
2. При каких значениях параметров α, β векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?
3. Найдите длины векторов $\vec{a} \pm \vec{b}$ если $\vec{a} = 3; -5; 8$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$.
4. Найдите координаты вектора $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ относительно косоугольного базиса $\vec{e}_1 = 1; 1; 0$, $\vec{e}_2 = 1; 0; 1$, $\vec{e}_3 = 0; 1; 1$. Чему равны углы между векторами базиса?
5. Какой угол составляет вектор $\vec{a}$ с векторами $\vec{p} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{g} = \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a}, \vec{b} / |\vec{a}|^2$?
6. При каких значениях λ векторы $\vec{a} = \lambda\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k}$ ортогональны?

7. Найти угол между диагоналями четырехугольника с вершинами
 $A: 1; -2; 2$, $B: 1; 4; 0$, $C: -4; 1; 1$, $D: -5; -5; 3$.
8. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис. Найти $\vec{e}_3$ если
 известны $\vec{e}_1 = 1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}$ и $\vec{e}_2 = 1/\sqrt{2}; 0; -1/\sqrt{2}$.
9. При каких значениях параметра λ векторы $1; 2\lambda; 1$, $1; \lambda; 0$, $0; \lambda; 1$
 компланарны?
10. Найти вектор $\vec{a}$ если известно, что он перпендикулярен векторам
 $4; -2; -3$, $0; 1; 3$ и образует тупой угол с осью ординат и $|\vec{a}| = 26$

Справочные материалы

Некоторые формулы векторной алгебры

Линейные операции.

- ❖ В декартовых координатах линейные операции над парой векторов выполняются по формулам

$$\lambda \vec{a} + \gamma \vec{b} = \vec{i} \lambda a_x + \gamma b_x + \vec{j} \lambda a_y + \gamma b_y + \vec{k} \lambda a_z + \gamma b_z .$$

- ❖ Линейные операции над произвольным числом векторов сводятся к линейным операциям над парами.

Скалярное произведение.

- ❖ В декартовых координатах скалярное произведение вычисляется по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, а через длины векторов и угол между ними, - по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$.

- ❖ Скалярное произведение любого вектора на себя дает квадрат его длины

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

- ❖ Скалярное произведение ортогональных (взаимно перпендикулярных) векторов равно нулю.

Векторное произведение.

- ❖ В декартовых координатах векторное произведение вычисляется по

$$\text{формуле } \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{i} b_y c_z - b_z c_y - \vec{j} b_x c_z - b_z c_x + \vec{k} b_x c_y - b_y c_x .$$

- ❖ Векторное произведение перпендикулярно каждому из своих сомножителей.
- ❖ Длина векторного произведения равна площади параллелограмма (удвоенной площади треугольника), построенного на сомножителях, и вычисляется через длины сомножителей и угол между ними по формуле

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin \varphi .$$

Смешанное произведение.

- ❖ В декартовых координатах смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z - b_z c_y - a_y b_x c_z - b_z c_x + a_z b_x c_y - b_y c_x .$$

- ❖ Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда (шести объемам тетраэдра), построенного на сомножителях. Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	Линейное пространство	множество V элементов произвольной природы, в котором определены операции сложения $u + v$, $u, v \in V$ и умножения на число αv , где α – число, $v \in V$, подчиняющиеся определенным аксиомам
2	Коммутативность сложения векторов	свойство операции сложения $u + v = v + u$
3	Ассоциативность сложения векторов	свойство операции сложения: $u + v + w = u + v + w$
4	Пространство непрерывных функций на отрезке a, b	совокупность функций, непрерывных на отрезке a, b , с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число; обозначается $C_{a,b}$
5	Арифметическое пространство R^n	совокупность упорядоченных наборов $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ действительных чисел, где определены операции сложения и умножения на число
6	Компоненты вектора $\vec{x} \in R^n$, $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$	числа x_i $i = 1, 2, \dots, n$, из которых состоит вектор
7	Вектор линейного пространства	элемент линейного пространства V
8	Линейная комбинация векторов u и v , принадлежащих пространству V	вектор $w \in V$, $w = \alpha u + \beta v$, где α, β – числа
9	Линейно независимая система векторов	Совокупность векторов $V_1, V_2, \dots, V_s$, для которых равенство $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_s V_s = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$.
10	Базис линейного пространства V	конечная система линейно независимых векторов, через которые линейно выражается любой вектор пространства
11	Линейная оболочка $L(a_1, a_2, \dots, a_s)$ системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$	совокупность всевозможных линейных комбинаций этих векторов
12	Разложение вектора и по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$	это однозначное представление $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.
13	Координаты вектора и в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.	коэффициенты в разложении вектора по базису
14	Размерность $\dim V$ подпространства V	число векторов базиса

15	Скалярное произведение двух векторов (u, v) (скалярное_произведение_двух_векторов)	скалярная функция двух векторных аргументов, подчиняющаяся определенным законам: 1) $u, v = v, u$ 2) $u + v, w = u, w + v, w$ 3) $u, v = u, \alpha v = \alpha u, v$ 4) $v, v \geq 0$, для всякого v ; $v, v = 0$ тогда и только тогда, когда $v = \vec{0}$
16	Евклидово пространство E	линейное пространство, в котором введено скалярное произведение
17	Ортогональные векторы	векторы $u, v \in E$, для которых $u, v = 0$
18	Ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$	базис пространства E , для которого выполнено свойство $e_i, e_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$
19	Неравенство Коши-Буняковского	неравенство $ a, b \leq a \cdot b $ для любых $a, b \in E$
20	Процесс ортогонализации	способ построения ортонормированного базиса по произвольному
21	Матрица Грама $G = (g_{ij})_{n,n}$	матрица, элементы которой $g_{ij} = f_i, f_j, \quad i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$, где $f_1, f_2, \dots, f_n$ - любые векторы пространства E
22	Линейный оператор A в линейном пространстве V	правило, по которому каждому вектору $v \in V$ ставится в соответствие некоторый вектор Av , причем $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$ для всех $u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in R$
23	Матрица A линейного оператора A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$	квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$ элементы которой a_{ij} определяются из соотношений $AE_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n \quad j=1, \dots, n$
24	Матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$	матрица $C = (c_{ij})_{n,n}$, элементами которой c_{ij} являются координаты вектора f_j по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$: $f_j = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \dots + c_{nj}e_n, \quad j=1, \dots, n$
25	Оператор $A^*: E \rightarrow E$, сопряженный к оператору $A: E \rightarrow E$	оператор, действующий в пространстве $V, V \rightarrow V$ такой, что $A^*u, v = u, Av$ для любых $u, v \in E$
26	Самосопряженный оператор A	такой оператор, который совпадает со своим сопряженным
27	Симметричная матрица	матрица A , для которой $A^t = A$

28	Ортогональная матрица $U = u_{ij} \quad n, n$	матрица, элементы которой удовлетворяют равенству: $\sum_{i=1}^n u_{ik} \cdot u_{im} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m \\ 1, & \text{если } k = m \end{cases}$
29	Собственный вектор v оператора A	ненулевой вектор $v \in V$, удовлетворяющий соотношению $A v = \lambda v$
30	Собственное значение (собственное число), соответствующее собственному вектору v оператора A	число λ , для которого $A v = \lambda v$
31	Характеристический многочлен матрицы A	многочлен n -й степени от λ , равный $P_A \lambda = \det A - \lambda E$
32	Характеристическое уравнение	уравнение $\det A - \lambda E = 0$
33	Корни характеристического уравнения	множество значений λ , для которых $P_A \lambda = 0$, являются собственными значениями оператора A
34	Собственное подпространство, отвечающее данному собственному значению	совокупность всех собственных векторов оператора A , отвечающих данному собственному значению
35	Собственный базис самосопряженного оператора	базис из собственных векторов симметрической матрицы этого оператора
36	Линейная форма на линейном пространстве V	функция $L v$, удовлетворяющая соотношению $L \alpha u + \beta v = \alpha L u + \beta L v$, $u, v \in V$; $\alpha, \beta \in R$. Линейная форма может быть записана в виде: $L v = C, v$, где C - данный вектор
37	Билинейная форма на линейном пространстве V	функция $b u, v$ двух векторных аргументов $u, v \in V$, линейная по каждому аргументу
38	Квадратичная форма	функция вида $g v = b v, v$, где b - билинейная форма
39	Матрица билинейной формы $b u, v$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$	$B = b_{ij} \quad n, n, \quad \text{где } b_{ij} = b e_i, e_j,$ матрица $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$
40	Матрица квадратичной формы	матрица соответствующей симметричной билинейной формы
41	Координатная запись квадратичной формы $Q(v)$	запись квадратичной формы в виде $Q v = Q x_1, x_2, \dots, x_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$ где $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i и j
42	Канонический вид квадратичной формы $Q(v)$	координатная запись формы, не содержащая произведений $x_i x_j$ $i \neq j$, т.е. содержащая лишь квадраты координат

43	Положительно определенная квадратичная форма $Q(v)$	форма $Q v \geq 0$ для всех v ; $Q v = 0$ только в случае $v = \vec{0}$
44	Неотрицательно определенная квадратичная форма	форма $Q v \geq 0$ для любых v
45	Критерий Сильвестра	теорема о необходимом и достаточном условии положительной определенности квадратичной формы
46	Закон инерции	теорема о сохранении числа положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде, не зависимо от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов
47	Метод итерации	численный метод последовательного приближения к решению
48	Гессиан	определитель n -го порядка, элементами которого являются вторые частные производные функции n переменных

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Проведение доказательства принадлежности множества с определенными в нем операциями к линейным пространствам	1. Выбрав два элемента a и b заданного множества, проверить выполнение закона коммутативности сложения $a+b=b+a$. 2. Выбрав три элемента a, b, c множества, проверить выполнение закона ассоциативности сложения $(a+b)+c=a+(b+c)$. 3. Найти во множестве нулевой элемент, т.е. элемент 0 такой, что $0+a=a$. 4. Выбрав элемент a множества, найти противоположный ему элемент, т.е. элемент $(-a)$ такой, что $a+(-a)=0$. 5. Проверить для числа 1 выполнение равенства $a \cdot 1 = a$. 6. Для чисел $\lambda, \mu \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda \mu a = \lambda \mu a$; 7. Проверить для чисел $\lambda, \mu \in R$ выполнение равенства $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$. 8. Для двух элементов множества a и b и $\lambda \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.
2	Исследование системы векторов на линейную независимость	1. Составить линейную комбинацию из заданных векторов с неизвестными коэффициентами $\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$. 2. Приравнять линейную комбинацию векторов нулевому вектору. 3. Записать по координатам равенства в систему. 4. Решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов, для чего привести матрицу системы к ступенчатому виду. (📖) 5. Определить число ненулевых угловых элементов в ступенчатой матрице – оно определяет число линейно независимых векторов в рассматриваемой системе векторов.
3	Определение размерности линейного пространства	1. Записать матрицу A для однородной системы алгебраических уравнений. 2. Решить систему алгебраических уравнений. 3. По общему решению системы найти фундаментальную систему решений, взяв в качестве значений свободных переменных такие, чтобы матрица, составленная из них, была единичной матрицей порядка, равного числу свободных переменных. (📖) 4. Определить размерность линейного пространства решений системы, которое равно количеству

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		векторов, образующих фундаментальную систему решений.
4	Определение координат вектора в произвольном базисе	1. Составить матрицу перехода U от базиса b к базису e, поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д. 2. Найти матрицу U^{-1}, обратную матрице U.  3. Найти координаты вектора x в базисе e, для чего вычислить произведение $U^{-1}x = x'$, где x – столбец координат вектора x в базисе b, а x' – столбец координат вектора x в базисе e. 4. Записать вектор x в базисе e: $x = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + x'_3 e_3$
5	Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису	1. Составить матрицу перехода U от базиса e к базису b, поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д. 2. Найти матрицу U^{-1}, обратную матрице U. 3. Найти произведение матриц $U^{-1}A_e$.  4. Найти произведение матриц $U^{-1}A_e U = U^{-1}A_e U = A_b$ равное матрице оператора A в базисе b.
6	Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы	1. Составить характеристический многочлен $P_\lambda = A_e - \lambda E$ для матрицы A_e линейного оператора A.  2. Получить характеристическое уравнение оператора A, для чего приравнять характеристический многочлен нулю. 3. Найти корни характеристического уравнения, разрешив его относительно неизвестного λ, полученные корни – собственные значения линейного оператора. 4. Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1: $A_e - \lambda_1 E = 0$. 5. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений.  6. Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_2: $A_e - \lambda_2 E = 0$ 7. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений. 8. Составить систему уравнений для определения

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3 : A_e - \lambda_3 E = 0$ 9. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений.
7	Построение ортогонального базиса по заданному	1. Составить матрицу A из координат векторов a_1, a_2, a_3, записав в первый столбец матрицы координаты вектора a_1, во второй – координаты вектора a_2, а в третий координаты вектора a_3. 2. Вычислить определитель матрицы $A: \det A$.  3. Если матрица A удовлетворяет условию $\det A \neq 0$, то заданная система векторов образует базис в R^3 и может быть взята за исходную для построения ортонормированного базиса. В противном случае заданную систему векторов использовать для построения ортонормированного базиса нельзя. 4. Вычислить векторы $g_1 = a_1$ и $e_1 = \frac{g_1}{\ g_1\ }$ 5. Вычислить векторы $g_2 = a_2 - a_2, e_1 e_1$ и $e_2 = \frac{g_2}{\ g_2\ }$  6. Вычислить векторы $g_3 = a_3 - a_3 e_1 e_1 - a_3 e_2 e_2$ и $e_3 = \frac{g_3}{\ g_3\ }$
8	Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения квадратов	1. Сгруппировать члены квадратичной формы, содержащей квадрат переменной x и её произведение на какую-либо другую переменную, квадрат переменной y и её произведение на переменную, отличную от x. 2. Дополнить каждое из выражений, стоящих в скобках, до полного квадрата, вычитая из всего уравнения дополнительно прибавленные члены, чтобы оно не изменилось по сравнению с исходным видом квадратичной формы. 3. Записать квадратичную форму в виде суммы квадратов, получившихся в результате преобразований. 4. Перейти к новым координатам; заменив каждое из выражений, возводимое в квадрат, на новую координату, получить канонический вид записи квадратичной формы.
9	Приведение квадратичной	1. Составит матрицу квадратичной формы.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
	формы к каноническому виду ортогональным преобразованием	2. Составить характеристическое уравнение для матрицы A и найти его корни (собственное значение квадратичной формы). 3. Найти канонический вид квадратичной формы. 4. Найти собственные векторы, соответствующие собственным значениям. 5. Пронормировать собственные векторы. 6. Составить из столбцов координат пронормированных собственных векторов матрицу ортонормированного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Литература

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П. С. Александров. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Беклемешев, Д. В. Линейная алгебра/ Д. В. Беклемешев. – М.: Наука, 1980. – 312 с.
3. Воеводин, В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
4. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре/ И. М. Гельфанд. – М., 1971. – 278 с.
5. Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре/ Х. Д. Икрамов. – М., 1975. – 319 с.
6. Ильин, В. А. Линейная алгебра/ В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – М., 1974. – 278с.
7. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры/ А. Г. Курош. – М: Физматгиз, 1962. – 431 с.
8. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебра/ А. И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
9. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
10. Тышкевич, В. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск: Вышэйша школа, 1968. – 315с.
11. Фаддеев, Д. К. Лекции по линейной алгебре/ Д. К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 305 с.